COLEGIO REPÚBLICA DE COLOMBIA I.E.D.

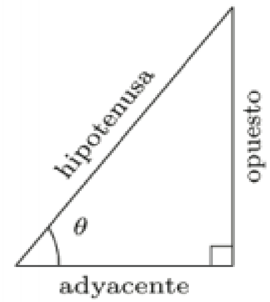
"Educación en valores para la convivencia y la productividad"

TALLER 3 MATEMÁTICAS
GRADO 1001
DOCENTE: ÓSCAR GACHARNÁ

Lea la información detenidamente y responda los ejercicios con respecto a esta.

TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo es un triángulo donde uno de los ángulos mide 90°. A los lados opuestos a los ángulos que miden menos de 90° se les conocen como los catetos y el lado opuesto al ángulo de 90° se le conoce como la hipotenusa. Dado un triángulo rectángulo y un ángulo agudo θ en ese triángulo, definimos seis funciones de ese ángulo. Llamamos a estas razones trigonométricas.



$$sen\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{opuesto}$$

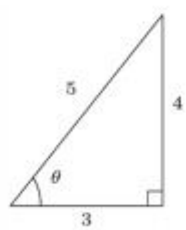
$$\cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{adyacente}$$

$$\tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} \qquad \cot\theta = \frac{adyacente}{opuesto}$$

EJEMPLOS:

Para los siguentes triángulos rectángulos calcule las 6 razones trigonométricas de θ:

a)

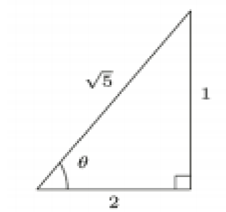


$$sen\theta = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

b)



$$sen\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

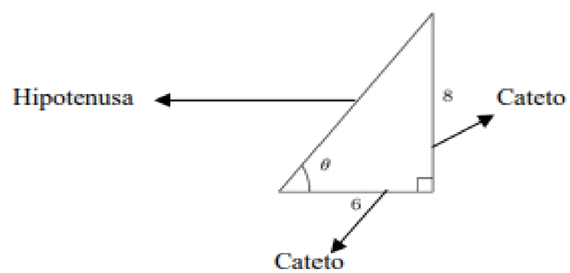
$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\csc\theta = \sqrt{5}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\theta = 2$$

c)



Como este es un triángulo rectángulo, podemos usar el Teorema de Pitágoras para calcular el lado que nos falta. El Teorema de Pitágoras nos dice que en un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En este caso tenemos $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Usamos esto para calcular las razones trigonométricas.

$$sen\,\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{8}{6} = \frac{3}{4}$$

NOTA: Observe que los valores del seno, el coseno y la tangente son recíprocos a los valores de la cosecante, la secante y la cotangente.

EJERCICIOS:

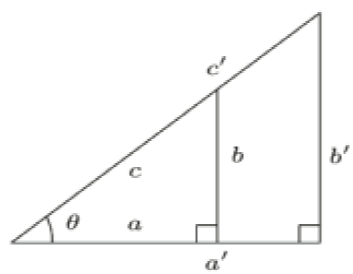
Para los siguentes triángulos rectángulos, en donde los catetos se denotan por a y b y la hipotenusa por c, calcule las 6 razones trigonométricas:

a) $a = 3$, $b = 5$

b) $a = 1$, $c = 4$

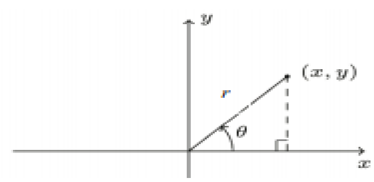
c) $a = 2$, $b = 7$

NOTA: Los valores de las razones trigonométricas de θ son independientes del triángulo que usemos para definirlas. Por ejemplo, si usamos el triángulo pequeño de la figura tenemos que $\sin\theta = \frac{b}{c}$ y si usamos el triángulo grande entonces $\sin\theta = \frac{b'}{c'}$, pero como los dos triángulos son semejantes, tenemos que $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$. Lo mismo para las otras funciones.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Volviendo al plano cartesiano, sea (x, y) un punto en el primer cuadrante. Observe que este punto determina el lado terminal de un ángulo y con esto podemos formar un triángulo rectángulo en el plano.



Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ las razones trigonométricas se convierten en:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

EJEMPLOS:

a) Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto (1, 2).

Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ las razones trigonométricas se convierten en:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

EJEMPLOS:

a) Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto (1, 2).

Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Con esto podemos calcular las razones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \sqrt{5}$$
$$\tan\theta = 3 \qquad \cot\theta = \frac{1}{3}$$

b) Si $x = 4$, $r = 5$, halla las 6 razones trigonométricas

Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} 5^2 &= 4^2 + y^2 \\ 25 &= 16 + y^2 \\ 25 - 16 &= y^2 \\ 9 &= y^2 \\ 3 &= y \end{aligned}$$

Con esto podemos calcular las funciones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{3}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{3}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$$
$$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

EJERCICIOS:

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo con la información dada:

a) el lado terminal del ángulo pasa por el punto (4, 6).

b) $y = 2$, $r = 6$

Si el punto está en cualquier otro cuadrante, el procedimiento es el mismo excepto que tenemos que tener cuidado con los signos. Recuerde que como r es una distancia, siempre es positiva.

EJEMPLOS:

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo generado por el lado terminal del punto dado:

a) (-8, -6)

Usando el Teorema de Pitágoras encontramos que $r = 10$. Entonces:

$$sen\theta = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \csc\theta = -\frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

b) El ángulo θ está en el cuarto cuadrante, $x = 1$, $r = \sqrt{5}$

Debido a que θ está en el cuarto cuadrante, $y < 0$. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $y = -2$. Entonces

$$sen\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = -2 \qquad \cot\theta = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS:

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo θ dada la siguiente información:

a) el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el segundo cuadrante, $y = 2$, $r = 5$